Quantenfeldtheorie

Vorlesung: A. Lenz **SS 2010**

Übungen: C. Gross, S. Schacht **Blatt 2**

Aufgabe 4: *Eichinvarianz bei nichtabelschen Theorien*

a) Nichtabelsche SU(N)-Eichtheorien sind invariant unter einer gleichzeitigen Transformation von Materie- und Eichfeldern

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi' = U\Psi\,, \\ T^a A^a_\mu &\rightarrow T^a A^{a\prime}_\mu = U\left(T^a A^a_\mu - i\frac{\hbar c}{g}U^{-1}\partial_\mu U\right)U^{-1}\,, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei

$$U = \exp\left[-\frac{ig}{\hbar c}T^a\Theta^a\right]\,.$$

Welche der Terme

$$\bar\Psi\Psi\,,\quad \bar\Psi\partial\!\!\!/\Psi\,,\quad \bar\Psi D\!\!\!\!/\Psi\,,\quad A^{\mu a}A^a_\mu$$

sind SU(N)-eichinvariant (wobei $D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g}{\hbar c}T^a A^a_\mu$)?

Ist der Massenterm $\bar\Psi\Psi$ eines Dirac spinors Ψ eichinvariant, wenn nur der linkshändige Teil transformiert?

b) Zeigen Sie, daß ein naiver Ansatz für den Feldstärketensor,

$$(F^a_{\mu\nu}T^a)^{naiv} = (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)T^a\,,$$

eines SU(N)-Eichfeldes nicht invariant unter der Transformation (1) ist. Was passiert, wenn man einen zusätzlichen nichtabelschen Term in $F^a_{\mu\nu}$ einführt, so daß

$$F^a_{\mu\nu}T^a = (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + \frac{g}{\hbar c}f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu)T^a\,? \tag{2}$$

Zeigen Sie, daß sich (2) auch schreiben läßt als

$$F^a_{\mu\nu}T^a = -\frac{\hbar c}{ig}[D_\mu, D_\nu]\,.$$

Was passiert für SU(N) $\rightarrow$ U(1)?

Aufgabe 5: *Casimir Operatoren*

Betrachten Sie eine Lie-Algebra mit Kommutator $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$. Eine irreduzible Darstellung R der Lie-Algebra sei gegeben durch Matrizen t^a_R. Der *Dynkinindex* $T(R)$ von R ist gegeben durch

$$\mathrm{tr}(t^a_R t^b_R) = T(R)\delta_{ab}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$f^{abc} = -\frac{i}{T(R)}\mathrm{tr}([t^a_R, t^b_R]t^c_R)$$

gilt. Hieraus folgt, dass die Strukturkonstanten f^{abc} total antisymmetrisch sind. Zeigen Sie damit, dass

$$[t^b_R, t^a_R t^a_R] = 0\,.$$

Hieraus folgt dass $(t^a_R t^a_R)_{ij} \propto \delta_{ij}$, wobei die Proportionalitätskonstante mit $C_2(R)$ bezeichnet wird und *quadratischer Casimir Operator* heisst.

b) Zeigen Sie die Identität

$$d(R)C_2(R) = d(G)T(R)\,,$$

wobei $d(R)$ die Dimension der Darstellung R ist und G die adjungierte Darstellung (i.e. $(t^b_G)_{ac} = if^{abc}$) bezeichnet (i.e. $d(R) = \delta_{ii}$ und $d(G) = \delta_{aa}$).

Insbesondere folgt hieraus $C_2(G) = T(G)$.

c) Nun betrachten wir den (physikalisch besonders wichtigen) Fall von SU(N) Lie Algebren.

Die fundamentale Darstellung, gegeben durch $(N^2 - 1)$ hermitesche spurlose $N \times N$ Matrizen, sei mit F bezeichnet. Es gilt $T(F) = 1/2$. Berechnen Sie $C_2(F)$.

d) Berechnen Sie nun $C_2(G)$ $(= T(G))$ unter Zuhilfenahme der Identität

$$2(t^a_F)_{ij}(t^a_F)_{kl} = \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl}\,.$$