Quantenfeldtheorie

A. Lenz

C. Gross, S. Schacht

SS 2010

Blatt 3

Aufgabe 6: *Pfadintegral für ein freies Teilchen*

Zeigen Sie, dass die Übergangsamplitude für ein freies Teilchen mit Masse m, das sich in einer Ortsdimension bewegt, durch den folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\langle q', t'|q, t\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i(t'-t)}} \exp\left(\frac{im}{2}\frac{(q'-q)^2}{t'-t}\right). \tag{1}$$

Überprüfen Sie, dass dieses Resultat sowohl ausgehend von der Hamilton- als auch von der Pfadintegraldarstellung der Übergangsamplitude erhalten werden kann:

$$\langle q', t'|q, t\rangle = \begin{cases} \langle q'| \exp\left(-iH(t'-t)\right)|q\rangle \\ N \int [\,\mathrm{d}q] \exp\left(i \int_t^{t'} \mathrm{d}t'' L\right) \end{cases} \tag{2}$$

mit $H = \frac{p^2}{2m}$ und $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2$ und dem Integrationsmaß des Pfadintegrals

$$N[\,\mathrm{d}q] = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\Delta}\right)^{n/2} \prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{d}q_i \tag{3}$$

wobei $(t'-t)$ in n Segmente t, t_1, t_2, …, t_{n-1}, $t' \equiv t_n$ der Länge Δ unterteilt wird, die den Orten x, x_1, x_2, …, x_{n-1}, $x' \equiv x_n$ korrespondieren.

Aufgabe 7: *Pfadintegral für eine quadratische Wirkung*

Betrachten Sie eine Wirkung mit höchstens quadratischen Termen

$$S[q] = \int \mathrm{d}t \left(a(t)\,\dot{q}^2 + b(t)\,\dot{q} + c(t)\,q\,\dot{q} + d(t)\,q + e(t)\,q^2 + f(t)\right) \tag{4}$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\langle q_f, t_f|q_i, t_i\rangle = F(t_f, t_i) \exp\left(iS_c(q_f, t_f; q_i, t_i)\right) \tag{5}$$

wobei $S_c(q_f, t_f; q_i, t_i)$ die Wirkung der klassischen Trajektorie und $F(t_f, t_i)$ eine von q_i und q_f unabhängige Funktion der Form

$$F(t_f, t_i) = N \int_{(0,t_i)}^{(0,t_f)} [\,\mathrm{d}\eta(t)] \exp\left(i \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \left(a\,\dot{\eta}^2 + c\,\eta\,\dot{\eta}^2 + e\,\eta^2\right)\right). \tag{6}$$

ist. Insbesondere gelten die Randbedingungen $\eta(t) = \eta(t') = 0$. Man kann $\eta(t)$ somit als Abweichung eines gegebenen $q(t)$ von der klassischen Trajektorie auffassen.

b) Zeigen Sie, dass der Vorfaktor $F(t_f, t_i)$ geschrieben werden kann als

$$F(t_f, t_i) = \frac{N'}{\sqrt{\det \hat{A}}} \tag{7}$$

mit einer Konstanten N' und dem Differentialoperator $\hat{A} = -a\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + e$.

Hinweis. Entwickeln Sie $\eta(t)$ als Reihe in orthonormale Basis–Funktionen $\chi_n(t)$ (mit $n = 1, 2, 3, \ldots$)

$$\eta(t) = \sum_n c_n \chi_n(t) \tag{8}$$

mit $\int_{t_i}^{t_f} \chi_n(t)\chi_m(t) = \delta_{nm}$ und $\chi_n(t_i) = \chi_n(t_f) = 0$. Das Integrationsmaß $N[\,\mathrm{d}\eta(t)] = N\prod_n \,\mathrm{d}\eta(t_n)$ kann geschrieben werden als $N\prod_n \,\mathrm{d}c_n$, womit wir eine alternative Definition des Pfadintegrals in der Form

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i\rangle = N \int \prod_n \,\mathrm{d}c_n \exp\left(iS[q]\right) \tag{9}$$

erhalten.

Aufgabe 8: *Pfadintegral einer Zustandssumme*

Zeigen Sie, dass die Zustandssumme eines kanonischen Ensembles $Z = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\right)$ mit $\beta = \frac{1}{kT}$ und dem Hamiltonian H (im einfachen Fall von einem System mit einem Freiheitsgrad) in einer Pfadintegraldarstellung geschrieben werden kann als

$$Z = \int \,\mathrm{d}q_0 \int [\,\mathrm{d}q] \exp\left(i \int_0^{-i\beta} \,\mathrm{d}t \,\Lambda(q, \dot{q}) \right) \tag{10}$$

mit $q_0 = q(t=0) = q(-i\beta)$ und $\Lambda(q, \dot{q})$ dem Lagrangian in euklidischer Zeit $\tau = it$.