Quantenfeldtheorie

A. Lenz
C. Gross, S. Schacht

SS 2010
Blatt 4

Aufgabe 9: *Feynman–Propagator aus dem Vakuumfunktional*

Vorbemerkungen Das Vakuumfunktional $Z[J]$ ist von zentraler Bedeutung für die Behandlung der Feldtheorie. Es lässt sich zur Berechnung von Greenschen Funktionen, also des Vakuumerwartungswertes von T–Produkten, benutzen. Aus

$$\langle 0| T\left(\hat{\phi}(x_1)\ldots\hat{\phi}(x_n)\right)|0\rangle = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi\, \phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}(\phi,\dot{\phi})\right) \tag{1}$$

und der Definition des Vakuum–Vakuum–Übergangsfunktionals

$$Z[J] = \langle 0|0\rangle_J = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi\,\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x\left(\mathcal{L}(\phi,\dot{\phi})+J\phi\right)\right) \tag{2}$$

liest man sofort

$$\langle 0| T\left(\hat{\phi}(x_1)\ldots\hat{\phi}(x_n)\right)|0\rangle = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\ldots\delta J(x_n)}\right|_{J=0} \tag{3}$$

ab, d.h. $Z[J]$ ist erzeugendes Funktional Greenscher Funktionen.

Aufgabenstellung Berechnen Sie explizit das Vakuumfunktional $Z_0[J]$ für den Fall eines *freien* skalaren ungeladenen reellen Feldes $\phi(x)$ mit der Lagrange–Dichte

$$\mathcal{L}_0 = \frac{\hbar^2}{2}\partial_\mu\,\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{4}$$

also

$$Z_0[J] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi\,\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x\left(\frac{\hbar^2}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J\phi\right)\right]. \tag{5}$$

Drücken Sie dazu das Vakuumfunktional in Abhängigkeit vom Feynman–Propagator aus.

Hinweise

- Transformieren Sie $Z_0[J]$ zunächst in euklidische Koordinaten ($Z_0^E[J]$).
- Bringen Sie $Z_0^E[J]$ auf die Form

  $$Z_0^E[J] = \mathcal{N}_E\int \mathcal{D}\phi\exp\left(-\frac{1}{2}(\phi, A\phi) + (\rho,\phi)\right) \tag{6}$$

  mit dem Skalarprodukt

  $$(\psi,\phi) = \int \mathrm{d}^4x_E\psi(x_E)\phi(x_E) \tag{7}$$

und

$$(\phi, A\phi) = \int \mathrm{d}^4x'_E\, \mathrm{d}^4x_E \phi(x'_E) A(x'_E, x_E) \phi(x_E). \tag{8}$$

Benutzen Sie anschließend die Verallgemeinerung des Gaußschen Integrals

$$\int \mathcal{D}\phi \exp\left(-\frac{1}{2}(\phi, A\phi) + (\rho, \phi)\right) = (\det A)^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{2}\left(\rho, A^{-1}\rho\right)\right) \tag{9}$$

wobei die Inverse von $A(x'_E, x_E)$ durch

$$\int \mathrm{d}^4x_E A^{-1}(x'_E, x_E) A(x_E, x''_E) = \delta^4(x'_E - x''_E) \tag{10}$$

definiert ist.

- Verwenden Sie die Normierung des Vakuumfunktionals bei Abwesenheit einer äußeren Störung.
- Identifizieren Sie den euklidischen Feynman–Propagator eines massiven Spin–0-Felds

$$\Delta_F^E(x'_E - x_E) := \frac{1}{\hbar} A^{-1}(x'_E, x_E). \tag{11}$$

Besitzt der euklidische Propagator Pole?

- Führen Sie die analytische Fortsetzung zurück zur Minkowski–Raumzeit mit Hilfe einer Wick–Rotation durch. Besitzt der Propagator im Minkowski–Raum Pole? Wie führen Sie die Integration durch?