Quantenfeldtheorie

A. Lenz **SS 2010**

C. Gross, S. Schacht **Blatt 6**

Aufgabe 11: *LSZ–Reduktionsformel*

Vorbemerkungen Da Teilchenzustände mit Feldern in Verbindung gebracht werden können, ist es natürlich zu erwarten, dass man Greens–Funktionen dieser Felder benötigt, um S–Matrix–Elemente zu erhalten. Die konkrete Verbindung von S–Matrix–Elementen und Greens–Funktionen drückt sich in der Reduktionsformel von Lehmann, Symanzik und Zimmermann[1] aus. Wir betrachten hier den einfachen Fall von neutralen skalaren Teilchen mit der physikalischen Masse m. Die Greens–Funktionen definieren wir zu

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) := \langle 0| \, T\phi(x_1) \ldots \phi(x_n) \, |0\rangle \tag{1}$$

mit dem Feld ϕ, das die charakteristischen Eigenschaften

$$\langle 0| \, \phi(x) \, |0\rangle = 0, \qquad \langle 0| \, \phi(x) \, |k\rangle = e^{-ix\cdot k}, \qquad \langle k| \, \phi(x) \, |0\rangle = e^{ix\cdot k} \tag{2}$$

besitzt, wobei in der ersten der obigen Gleichungen vorausgesetzt wurde, dass keine spontane Symmetriebrechung stattfindet. Der zugehörige zeitabhängige Erzeugungsoperator $\phi(f,t)$, der einen Zustand f zum Zeitpunkt t erzeugt, ist gegeben durch

$$\phi(f,t) = i \int \mathrm{d}^3x \, (\phi(x) \, \partial_0 f(x) - f(x) \, \partial_0 \phi(x)) \tag{3}$$

und hat die Eigenschaften

$$\langle 0| \, \phi(f,t) \, |0\rangle = 0, \qquad \langle k| \, \phi(f,t) \, |0\rangle = \langle k|f\rangle \, , \qquad \langle 0| \, \phi(f,t) \, |k\rangle = 0. \tag{4}$$

Gleichung (3) lässt sich folgendermaßen einsehen: Definieren wir eine zeitabhängige Sesquilinearform $\langle \, , \, \rangle$ zu

$$\langle f,g\rangle(t) = i \int \mathrm{d}^3x f^*(t,x)\partial_0 g(t,x) - g(t,x)\partial_0 f^*(t,x) \tag{5}$$

so sind ebene Wellen $e_p^{\pm}(x) = \exp(\pm ixp)$ orthogonal bzgl. dieser Form:

$$\langle e_p^r, e_q^s\rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p-q)(rp_0 + sq_0) \exp\left(-it(rp_0 - sq_0)\right) \tag{6}$$

und für ein freies Feld

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2E} \left(e^{ix\cdot k} a^\dagger(k) + e^{-ix\cdot k} a(k) \right) \tag{7}$$

haben wir

$$a^\dagger(p) = \langle e_p^+, \phi\rangle \quad \text{and} \quad a(p) = -\langle e_p^-, \phi\rangle. \tag{8}$$

Sei f nun eine Lösung der Klein–Gordon–Gleichung mit positiver Energie und $|\psi\rangle$ ein beliebiger Zustand. Dann haben wir

$$\lim_{t\to\pm\infty} \langle \psi| \, \phi(f,t) \, |0\rangle = \langle \psi|f\rangle \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\pm\infty} \langle 0| \, \phi(f,t) \, |\psi\rangle = 0. \tag{9}$$

[1] On the formulation of quantized field theories. (In German) H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann, (Göttingen, Max Planck Inst.). Nov 1954. Published in Nuovo Cim.1:205-225,1955.

Der Annihilations–Operator ist gegeben durch

$$\phi(f,t)^\dagger = \phi(-f^*,t). \tag{10}$$

Die S–Matrix ist der Operator, der Anfangs– und Endzustand verbindet:

$$\langle f_1, f_2| S |g_1, g_2\rangle =^+ \langle f_1, f_2|g_1, g_2\rangle^- \tag{11}$$

wobei wir die beiden Typen von Zweiteilchen–Zuständen $|f,g\rangle^\pm$ definieren als

$$\langle\psi|f,g\rangle^- = \lim_{t\to-\infty} \langle\psi|\,\phi(f,t)\,|g\rangle \tag{12}$$

$$\langle\psi|f,g\rangle^+ = \lim_{t\to\infty} \langle\psi|\,\phi(f,t)\,|g\rangle\,. \tag{13}$$

Aufgabenstellung

- Nehmen Sie an, dass f die Klein–Gordon–Gleichung erfüllt. Betrachten Sie die Operation

$$P(f,x)\phi(x) := \left(\lim_{t\to-\infty} - \lim_{t\to\infty}\right)\phi(f,t) = -\int \mathrm{d}t\,\partial_0\phi(f,t) \tag{14}$$

  und bringen Sie sie auf die Form

$$P(f,x_r)F(x_1,\ldots x_n) = i\int \mathrm{d}^4x_r f(x_r) D_{x_r} F(x_1,\ldots,x_n). \tag{15}$$

  mit dem Klein–Gordon–Operator D_{x_r}.

- Zeigen Sie unter Verwendung des Hinweises und der Eigenschaften des Operators $\phi(x,t)$, dass

$$P(f,x_r)G(x_1,\ldots,x_n) = \langle 0|\,T\phi(x_1)\ldots\widehat{\phi(x_r)}\ldots\phi(x_n)\,|f\rangle \quad \text{und} \tag{16}$$

$$P(f^*,x_r)G(x_1,\ldots,x_n) = \langle f|\,T\phi(x_1)\ldots\widehat{\phi(x_r)}\ldots\phi(x_n)\,|0\rangle \tag{17}$$

  wobei $\widehat{\phi(x_r)}$ den Term kennzeichnet, der weggelassen wird.

- Wenden Sie nun die P–Operatoren auf eine Vierpunktfunktion an um ein S–Matrix–Element für die Streuung von Wellenpaketen zu erhalten. Bilden Sie

$$P(f_1^*,x_1)P(f_2^*,x_2)p(f_3,x_3)P(f_4,x_4)\,\langle 0|\,T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\,|0\rangle \tag{18}$$

  und finden Sie den Zusammenhang mit $(S-1)$ indem Sie die Definition der S–Matrix identifizieren. Nehmen Sie dabei an, dass die Teilchen nicht miteinander wechselwirken bzw. interferieren.

- Nehmen Sie nun den Limes ebener Wellen und setzen Sie $f = e^{\pm ikx}$. Bilden Sie $P(e^{\pm ikx})G(x)$.
- Wie lautet der Ausdruck für die $(S-1)$–Matrix in diesem Limes?

Hinweis

- Sei $B_r(t)$ eine beliebige operatorwertige Funktion der Zeit. Es lässt sich zeigen, dass die Beziehung zwischen der Zeitintegration, der Differentiation bzgl. der Zeit und der Zeitordnung derart gestaltet ist, dass

$$P(f,x)T\left[\phi(x)B_k(t_k)\ldots B_1(t_1)\right] = T\left[B_k(t_k)\ldots B_1(t_1)\right]\phi(f,-\infty) - \phi(f,\infty)T\left[B_k(t_k)\ldots B_1(t_1)\right]. \tag{19}$$