Quantenfeldtheorie

A. Lenz
C. Gross, S. Schacht

SS 2010
Blatt 9

Aufgabe 15: *Photon-Selbstenergie in der QED*

Aufgabenstellung Berechnen Sie die Vakuumpolarisation in der QED auf Ein-Schleifen-Niveau.

- Zeichnen Sie das entsprechende Diagramm und zeigen Sie durch Anwendung der Feynman-Regeln, dass die Vakuumpolarisation durch

$$i\Pi^{\mu\nu} = -(-ie)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left(\frac{i(\not{k} + \not{q} + m)}{(k+q)^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma^\nu \right) \tag{1}$$

  gegeben ist.
- Führen Sie einen Feynman-Parameter ein und schreiben Sie

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x I^{\mu\nu}(q,x) \tag{2}$$

  mit einer zu bestimmenden Funktion $I^{\mu\nu}(q,x)$.
- Berechnen Sie das dimensional regularisierte Integral

$$I^{\mu\nu}(q,x,\delta) = \mathrm{Reg}_D I^{\mu\nu}(q,x) \tag{3}$$

  in $D = 4 - 2\delta$ Dimensionen. Approximieren Sie das regularisierte Integral mittels einer Laurent–Entwicklung.
- Zeigen Sie, dass

$$\Pi^{\mu\nu}(q^2,\delta) = -\Pi(q^2,\delta) q^2 P_T^{\mu\nu} \tag{4}$$

  mit

$$P_T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \tag{5}$$

  und

$$\Pi(q^2,\delta) = \frac{\alpha}{3\pi}\left(\frac{1}{\delta} - \gamma\right) + \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_0^1 \mathrm{d}x (1-x) \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - x(1-x)q^2}\right). \tag{6}$$

Hinweise Als Erinnerung führen wir hier noch einmal die Ergebnisse für einige generische Feynman-Integrale in dimensionaler Regularisierung auf:

$$\mathrm{Reg}_D \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2-a)^n} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{\Gamma(n-2+\delta)}{\Gamma(n)} \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-2} \left(\frac{4\pi}{a}\right)^{\delta} \tag{7}$$

$$\mathrm{Reg}_D \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu}{(p^2-a)^n} = 0 \tag{8}$$

$$\mathrm{Reg}_D \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^2}{(p^2-a)^n} = \frac{i(2-\delta)}{16\pi^2} \frac{\Gamma(n-3+\delta)}{\Gamma(n)} \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-3} \left(\frac{4\pi}{a}\right)^{\delta} \tag{9}$$

$$\mathrm{Reg}_D \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2-a)^n} = \frac{i g^{\mu\nu}}{32\pi^2} \frac{\Gamma(n-3+\delta)}{\Gamma(n)} \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-3} \left(\frac{4\pi}{a}\right)^{\delta}. \tag{10}$$

Reg_D ist der dimensionale Regularisierungsoperator. Beachten Sie, dass in dimensionaler Regularisierung die Kopplungen einen zusätzlichen Faktor μ^δ erhalten. Die Laurent-Entwicklung von $\Gamma(\delta) z^\delta$ lautet:

$$\Gamma(\delta) z^\delta = \left(\frac{1}{\delta} - \gamma\right)(1 + \delta \ln z) + \mathcal{O}(\delta) \tag{11}$$

$$= \frac{1}{\delta} - \gamma + \ln z + \mathcal{O}(\delta). \tag{12}$$

Aufgabe 16: *Passarino-Veltman Reduktion*

Vorbemerkungen Die Passarino-Veltman Reduktion ist eine Methode, ein n-Punkt Schleifen-Integral mit r Potenzen des Schleifen-Impulses l im Zähler auf "skalare" s-Punkt-Funktionen mit $s = n-r, \dots, n$ zu reduzieren. "Skalar" bedeutet dabei ein Integral mit keiner Potenz von Schleifen-Impulsen im Zähler.

Seien p_i die eingehenden externen Impulse und $d = 4-2\varepsilon$ die Anzahl der Dimensionen. Alle externen Impulse seien 4-dimensional. Ein Schleifenintegral mit Zähler $f(l)$ ist gegeben durch

$$I_n[f(l)] \equiv -i(4\pi)^{d/2} \int \frac{\mathrm{d}^d l}{(2\pi)^d} \frac{f(l)}{(l^2-m_0^2)((l+q_1)^2-m_1^2)\dots((l+q_{n-1})^2-m_{n-1}^2)}, \tag{13}$$

mit

$$q_i \equiv p_1 + p_2 + \dots + p_i. \tag{14}$$

Den Fall $f(l) = 1$ nennen wir "skalares" Integral. Weiterhin definieren wir

$$I_{n-1}^{(j)}[f(l)] \equiv -i(4\pi)^{d/2} \int \frac{\mathrm{d}^d l}{(2\pi)^d} f(l)$$
$$\times \frac{f(l)}{(l^2-m_0^2)((l+q_1)^2-m_1^2)\dots((l+q_{j-1})^2-m_{j-1}^2)((l+q_{j+1})^2-m_{j+1}^2)\dots((l+q_n)^2-m_n^2)}. \tag{15}$$

Wir betrachten nun den Fall $f(l) = l^\mu$. Wir können schreiben:

$$I_n[l^\mu] = -i(4\pi)^{d/2} \int \frac{\mathrm{d}^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu}{(l^2-m_0^2)((l-q_1)^2-m_1^2)\dots((l-q_n)^2-m_n^2)} = \sum_{i=1}^{n-1} C_{n;i} p_i^\mu, \tag{16}$$

da die linke Seite ausschließlich aus den Vektoren $p_1, \ldots, p_{n-1}$ konstruiert werden kann. Wenn wir beide Seiten mit p_j^μ kontrahieren, erhalten wir

$$I_n[l \cdot p_j] = -i(4\pi)^{d/2} \int \frac{\mathrm{d}^d l}{(2\pi)^d} \frac{l \cdot p_j}{(l^2 - m_0^2)((l-q_1)^2 - m_1^2) \ldots ((l-q_n)^2 - m_n^2)} = \sum_{i=1}^{n-1} C_{n;i} \Delta^{ij} \tag{17}$$

mit der Gram-Matrix $\Delta^{ij} = p_i \cdot p_j$. Da $p_j = q_j - q_{j-1}$ (mit $q_0 = 0$) können wir den Zähler des Integrals schreiben als

$$l \cdot p_j = \frac{1}{2} \left(((l+q_j)^2 - m_j^2) - ((l+q_{j-1})^2 - m_{j-1}^2) + m_j^2 - m_{j-1}^2 - q_j^2 + q_{j-1}^2 \right). \tag{18}$$

Dies ist der Kern der Passarino-Veltman Reduktionsformel. Wir erhalten auf diese Weise $n-1$ lineare Gleichungen für die Koeffizienten $C_{n;i}$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} C_{n;i} \Delta^{ij} = \frac{1}{2} \left(I_{n-1}^{(j)}[1] - I_{n-1}^{j-1}[1] + (m_j^2 - m_{j-1}^2 - q_j^2 + q_{j-1}^2) I_n[1] \right). \tag{19}$$

Das System linearer Gleichungen kann gelöst werden durch:

$$C_{n;i} = \frac{1}{2} \sum_j \Delta_{ij}^{-1} \left(I_{n-1}^{(j)}[1] - I_{n-1}^{(j-1)}[1] + (m_j^2 - m_{j-1}^2 - q_j^2 + q_{j-1}^2) I_n[1] \right). \tag{20}$$

Aufgabenstellung Betrachten Sie das folgende Schleifenintegral:

$$-i(4\pi)^{d/2} \int \frac{\mathrm{d}^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu}{l^2 (l+q_1)^2 (l+q_2)^2} = C_{3;1} p_1^\mu + C_{3;2} p_2^\mu \tag{21}$$

mit $q = p_1$ und $q_2 = (p_1 + p_2)$ und bestimmen Sie mit der oben skizzierten Methode $C_{3;1}$ und $C_{3;2}$ als Funktion der skalaren Standardintegrale $I_2^{(0)}[1], I_2^{(1)}[1], I_2^{(2)}[1]$, $I_3[1]$ und der externen Impulse.

Hinweise Die obige Reduktion lässt sich noch einfach per Hand durchführen. Für höhere Tensoren kann man Software wie FeynCalc[1] verwenden, insbesondere dessen Funktionen `PaVe`, `PaVeOrder` und `PaVeReduce`. Mit leichten Modifikationen verwendet FeynCalc die Notation von `arXiv:0709.1075`[2]. Für die Organisation größerer Rechnungen kann FormCalc [3] eingesetzt werden, das auch die Passarino-Veltman-Methode zur algebraischen Reduktion verwendet.

[1] `www.feyncalc.org` R. Mertig, M. Bohm and A. Denner, FeynCalc: Computer algebraic calculation of Feynman amplitudes, Comput. Phys. Commun. 64 (1991) 345359.

[2] A. Denner, Techniques for calculation of electroweak radiative corrections at the one loop level and results for W physics at LEP-200, Fortschr. Phys. 41 (1993) 307420 [0709.1075]

[3] `http://www.feynarts.de/formcalc/` FormCalc and LoopTools: T. Hahn and M. Perez-Victoria, Comput. Phys. Commun. 118 (1999) 153 [hep-ph/9807565]