Quantenfeldtheorie

A. Lenz
C. Gross, S. Schacht **SS 2010**

Blatt 1

Aufgabe 1: *Euler-Lagrange Gleichungen*

Betrachten Sie die Wirkung

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad , \tag{1}$$

in der das Raumintegral über die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ die Rolle der Lagrangefunktion aus der Punktmechanik übernommen hat. Leiten Sie, wie aus der Mechanik bekannt, aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\delta \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = 0 \tag{2}$$

die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \tag{3}$$

für die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ her. Die Variation der Felder verschwinde dabei wie gewohnt an den Endpunkten $t_{1,2}$. Leiten Sie aus folgenden Lagrangedichten die Bewegungsgleichungen ab:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \Phi)(\partial_\mu \Phi) - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \Phi\Phi \tag{4}$$

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(\vec{x}) \left(i\hbar\, \not{\partial} - mc \right) \Psi(\vec{x}) \tag{5}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \tag{6}$$

Aufgabe 2: *Eichinvarianz bei abelschen Theorien*

a)

Die Maxwellgleichungen lauten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{7}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = +\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \tag{8}$$

wobei $\vec{E}$ und $\vec{B}$ elektrische und magnetische Feldstärke, ρ die Ladungsdichte und $\vec{j}$ den Strom beschreiben. Anstelle von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ kann man diese Gleichungen auch durch das skalare Potential Φ und das Vektorpotential $\vec{A}$ ausdrücken, welche durch die folgenden Beziehungen festgelegt werden:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{9}$$

Benutzen Sie (9), um die Maxwellgleichungen in Beziehungen für Φ und $\vec{A}$ umzuschreiben.

b)

Φ und $\vec{A}$ sind durch ihre Definitionsgleichungen (9) nicht eindeutig festgelegt. Zeigen Sie durch Einsetzen, dass sich die physikalischen Observablen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nicht ändern, wenn die Potentiale eine sogenannte "Eichtransformation" erfahren, bei der

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda,$$
$$\Phi \to \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}.$$

Wählen Sie nun Φ und $\vec{A}$ so, dass $\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$. Zeigen Sie, dass man damit die Maxwellgleichungen in folgende Form bringen kann:

$$\triangle\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi = -4\pi\rho, \tag{10}$$
$$\triangle\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}. \tag{11}$$

c)

Durch Einführen eines Viererpotentials A^μ und eines Viererstroms j^μ,

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A}),$$
$$j^\mu = (\rho, \frac{\vec{j}}{c}),$$

lassen sich die Maxwellgleichungen noch kompakter schreiben:

$$\Box A^\mu = 4\pi j^\mu. \tag{12}$$

Zeigen Sie, dass (12) äquivalent mit (10, 11) ist.

Unter Benutzung der Definition des Feldstärketensors $F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ zeige man ferner, dass (12) geschrieben werden kann als

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu. \tag{13}$$

Ist (13) eichinvariant unter der Transformation $A^\mu \to A^{\mu'} = A^\mu - \partial^\mu\Lambda$?

Aufgabe 3: *Minimale Kopplung*

Zeigen Sie, daß die Lagrangefunktion $L(x_i, \dot{x}_i, t)$ eines punktförmigen Teilchens der Masse m und der Ladung e in einem elektromagnetischen Feld $(\Phi, \vec{A})$ gegeben ist durch

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - e\,\Phi(\mathbf{x}, t) + \frac{e}{c}\,\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t). \tag{14}$$

Wie sehen die Bewegungsgleichungen für dieses Teilchen aus?